

æ

TÓPICOS EM TEORIAS DE CAMPOS

Notas de Aula do
Curso de Extensão Universitária
22 a 26 de julho de 2002
Instituto de Física Teórica - UNESP
Rua Pamplona, 145
São Paulo, SP - Brazil

0. PREFÁCIO

Este curso foi originalmente concebido e idealizado tendo em vista suprir a deficiência de oferta de um curso realmente introdutório em Teorias de Campos, direcionado especificamente aos estudantes de graduação em Física e áreas correlatas, especialmente àqueles que estejam ou no início ou no final de completarem os créditos dos sétimo e oitavo semestres.

Estas notas de aulas não tem a mínima pretensão de ser um substituto para os excelentes livros–textos que se encontram na praça para um estudo introdutório da Teoria de Campos, seja a nível clássico ou quântico. Tampouco tem o autor destas notas a menor pretensão de que estas notas sejam completas — ou mesmo de uma abrangência qualitativa e quantitativa que muitos “experts” do assunto classificariam como “mínimo necessário” — como uma introdução à Teoria de Campos. Lacunas, certamente as há e quem sabe não poucas. O que se pretendeu é que estas notas possam servir de guia para os alunos que assistiram ao curso como uma ferramenta para aclarar e quiçá, sedimentar as idéias que foram rapidamente percorridas durante o curso. A bibliografia sugerida no final não significa necessariamente que as referências ali listadas sejam as únicas fontes de estudo mais aprofundado, nem tampouco foram colocadas com o intuito e devido cuidado de evitar incorrer em omissões importantes. Aqui novamente ressaltamos que a citação bibliográfica também tem o caráter didático de ser apenas um guia.

Alfredo Takashi Suzuki

Julho de 2002

1 FORMALISMO LAGRANGIANO

1.1 Sistemas Conservativos sem vínculos:

Considere um sistema clássico de N partículas, de modo que a sua descrição completa seja possível em termos de $3N$ equações de movimento. A *força* agindo em cada partícula será dada, de acordo com a *segunda lei de Newton*, por

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad , \quad (1)$$

enquanto a *energia cinética total* será dada por

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad , \quad (2)$$

de modo que, a força pode ser expressa em termos da energia cinética da seguinte forma:

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) \quad . \quad (3)$$

Agora, para um sistema clássico *conservativo*, tem-se que a força é o negativo da derivada de uma função *potencial*, isto é:

$$F_i = - \frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} \quad , \quad (4)$$

de modo que identificando-se as duas expressões para a força, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad . \quad (5)$$

Verificamos que a expressão acima deduzida tem o mérito de descrever as equações de movimento a partir de quantidades escalares T e V , respectivamente energias cinética e potencial. O que queremos agora é traduzir estas

equações escritas no sistema cartesiano de coordenadas para um sistema de coordenadas generalizadas. Seja um tal sistema respresentado por

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) \equiv q_i(x_j, t) . \quad (6)$$

A relação inversa, que supomos existir, através de uma transformação não singular, é dada por

$$x_j = x_j(q_i, t) \quad (7)$$

A partir disso, obtemos que

$$\dot{x}_j \equiv \frac{dx_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} , \quad (8)$$

de onde obtemos a igualdade

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (9)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} . \quad (10)$$

Derivando-se a expressão acima em relação a t , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} , \quad (11)$$

onde definimos as quantidades Q_i , ditas componentes da força generalizada,

$$Q_i \equiv \sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} , \quad (12)$$

e usamos a relação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \quad (13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) \quad (14)$$

$$= \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \quad (15)$$

de modo que podemos reescrever o termo resultante

$$m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (16)$$

Novamente, se o sistema for *conservativo*, teremos

$$F_j = - \frac{\partial V(x_j)}{\partial x_j}, \quad (17)$$

o que implica, substituindo em Q_i :

$$Q_i = - \sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (18)$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (19)$$

O termo $\partial T / \partial q_i$ corresponde à forma generalizada das forças fictícias do tipo centrífuga e de Coriolis, que são devidas à curvatura das superfícies coordenadas, sendo portanto nulas no sistema cartesiano.

Uma vez que o potencial, por definição depende somente da posição, podemos introduzir uma nova função, chamada *Lagrangiana*,

$$L = T - V \quad (20)$$

e reescrever a equação acima como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \quad (21)$$

Estas são conhecidas como as *equações de Euler–Lagrange* do sistema. Temos aqui $3N$ equações que representam uma reformulação muito elegante das propriedades do sistema, antes expressas em termos da segunda lei de Newton. Uma vantagem que vemos de imediato é que a descrição para os

termos difíceis como as forças fictícias ficam automaticamente determinados calculando-se a derivada parcial da energia cinética em função da coordenada generalizada q_i . Devemos notar, no entanto, que a restrição aos sistemas conservativos se encontra subentendido.

1.2 Sistemas não conservativos

Tínhamos, antes das considerações a respeito do caráter conservativo do sistema, a seguinte equação, em termos de coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} , \quad (22)$$

onde a força generalizada Q_i é dada por

$$Q_i \equiv \sum_j m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} , \quad (23)$$

Vamos supor que as componentes desta força generalizada possam ser expressas por

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_i} , \quad (24)$$

onde $M = M(q_i, \dot{q}_i, t)$ é uma função das coordenadas, de suas derivadas e do tempo. Então, sob esta condição, teremos novamente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} , \quad (25)$$

desde que $L = T - M$. A princípio, poder-se-ia supor que temos uma restrição um tanto severa para a forma da função M para que pudesse ser de alguma utilidade prática, mas ela engloba, na realidade o caso muito importante do movimento de partículas carregadas imerso num campo eletromagnético. A força sentida por estas cargas, em notação vetorial, é dada

pela expressão de Lorentz (em unidades de Gauss):

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (26)$$

Evidentemente esta expressão não está expressa de forma adequada para incorporar a forma necessária acima descrita. Para tanto devemos reescrevê-la em termos dos potenciais escalar e vetorial ϕ e \vec{A} , como expressões alternativas:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (27)$$

Desenvolvendo-se as expressões dos diversos produtos vetoriais obtemos que:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \quad (28)$$

onde

$$F_x = e \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x + \frac{1}{c} \left(\dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \quad (29)$$

e permutações cíclicas de (x, y, z) para as demais componentes F_y e F_z . Nestas equações, utilizamos as definições $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ para os versores (vetores unitários) das direções (x, y, z) das coordenadas cartesianas, e $v_x \equiv \dot{x}$, etc.

Agora, considerando que os potenciais escalar e vetorial são funções das coordenadas e do tempo, i.e.,

$$\phi = \phi(x, y, z, t) \quad ; \quad \vec{A} = \vec{A}(x, y, z, t), \quad (30)$$

e notando que, desta maneira temos a identidade:

$$\frac{dA_x}{dt} = \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \right) A_x, \quad (31)$$

e que podemos reescrever A_x como

$$A_x = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z), \quad (32)$$

observamos que a componente F_x da força pode ser escrita como:

$$F_x = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \right) e \left[\phi - \frac{1}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right], \quad (33)$$

onde utilizamos a notação reduzida $\vec{v} \cdot \vec{A} \equiv \dot{x} A_x + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z$, de modo que, de modo geral, cada componente da força pode ser escrita como (em notação facilmente compreensível):

$$F_i = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) M, \quad (34)$$

com $M = e[\phi - \frac{1}{c}(\vec{v} \cdot \vec{A})]$. Resta-nos ainda mostrar que esta mesma expressão se preserva nas coordenadas generalizadas. Para mostrar isto, considere-se que

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (35)$$

de onde

$$Q_i = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad (36)$$

que pode ser reescrita como

$$Q_i = \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \right\}, \quad (37)$$

Nesta última expressão, utilizamos o resultado já anteriormente obtido

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \quad (38)$$

Finalmente, observando que $M = M(x_j, \dot{x}_j)$ e $x_j = x_j(q_i, t)$, obtemos que

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}, \quad (39)$$

que está exatamente na forma requerida. A força de Lorentz, portanto, se amolda à formulação Lagrangiana, e as equações de movimento de uma partícula carregada num campo eletromagnético, podem ser descritas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} , \quad (40)$$

onde

$$L = T - M = T - e \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) . \quad (41)$$

2 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA

As componentes do momento generalizado são definidas por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \quad (42)$$

de modo que para cada componente da coordenada generalizada, temos a correspondente para o momento generalizado e cada combinação (q_i, p_i) constitui um par de *variáveis conjugadas*. A nomenclatura “*momento generalizado*” se deve ao fato de que para sistemas conservativos as quantidades assim definidas conduzem exatamente aos momentos lineares ou angulares correspondentes. Com sistemas não conservativos, a definição geral pode abranger quantidades não facilmente reconhecíveis como quantidade de movimento (momento). É o caso de uma carga que se move imerso num campo eletromagnético. Vimos que este é um caso não conservativo que pode ser descrito pela formulação de Lagrange, cuja Lagrangeana é dada por:

$$L = T - e \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right) . \quad (43)$$

A partir daqui, em coordenadas cartesianas, o momento generalizado é dado por

$$p_i = m\dot{x}_i + \frac{e}{c}A_i. \quad (44)$$

Vemos que estas componentes incluem, além dos termos familiares $m\dot{x}_i$, um termo adicional eA_i/c , que normalmente é identificado como *quantidade de movimento eletromagnética*, ou *momento eletromagnético*. Utilizando-se a definição de momento generalizado, podemos reescrever as equações de movimento de Lagrange como

$$\dot{p}_i \equiv \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (45)$$

que apresenta uma semelhança com a segunda lei de Newton.

A expressão acima nos diz que se a Lagrangeana do sistema não depender explicitamente da coordenada generalizada q_i , isto é, se

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

então

$$\dot{p}_i = 0,$$

o que nos diz que p_i é uma constante de movimento.

A função Lagrangeana é uma função cuja dependência é da forma $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, de modo que a sua derivada total em função do tempo fica:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (46)$$

ou, usando as equações de Euler–Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right\} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (47)$$

e esta, por sua vez, com o uso da definição do momento generalizado, pode ser reescrita como

$$\frac{dH}{dt} \equiv \dot{H} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (48)$$

onde introduzimos a função Hamiltoniana

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (49)$$

Ao passo que a função Lagrangeana é definida segundo a dependência funcional $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, a função Hamiltoniana que ora introduzimos, é entendida como tendo a dependência funcional $H = H(q_i, p_i, t)$, isto é, do par conjugado e eventualmente do tempo. Isto significa que os fatores \dot{q}_i que aparecem tanto na somatória quanto em L , devem ser resolvidos pela inversão da relação na equação definidora de p_i .

A partir daí, podemos determinar as equações de movimento de Hamilton, observando que, por um lado, a partir de $H = H(q_i, p_i, t)$, obtemos:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (50)$$

enquanto, a partir da definição da função $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, obtemos:

$$dH = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - dL. \quad (51)$$

Substituindo

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (52)$$

obtemos que

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (53)$$

de modo que, comparando-se os coeficientes das duas variações, obtemos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t}.\end{aligned}\tag{54}$$

As duas primeiras equações acima são conhecidas como *equações de Hamilton* em sua forma canônica. Aparentemente elas se constituem num progresso em formulação, uma vez que são constituídas por equações diferenciais de primeira ordem, enquanto que as de Lagrange são de segunda ordem. Na prática, porém, isto é ilusório, uma vez que solucioná-las requer tantas condições iniciais conhecidas quantas as requeridas no caso de Lagrange, e resolver mesmo uma equação diferencial parcial de primeira ordem pode envolver grande dificuldade.

A principal razão para se estudar o formalismo Hamiltoniano é obter um fundamento conveniente para a Mecânica Quântica e Estatística, e utilizar o formalismo na sua extensão à quantização na Teoria de Campos.

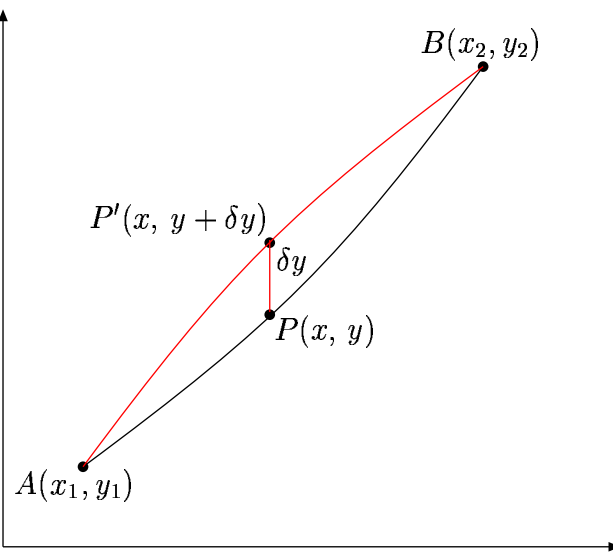
3 PRINCÍPIOS VARIACIONAIS

Consideraremos aqui o princípio de Hamilton como uma forma econômica de exprimir a dinâmica de um sistema clássico. Antes de mais nada vejamos o problema puramente matemático de se determinar sob que condição ou condições um certo tipo de integral apresenta um valor estacionário, isto é, não depende do caminho de integração escolhido.

Seja esta integral definida como:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', x)\tag{55}$$

onde $y = y(x)$ e $y' \equiv \frac{dy}{dx}$.



Figura

Seja APB a trajetória para a qual I assim definida é estacionária, com os pontos A, P e B , onde P é um ponto intermediário entre A e B , dados pelas seguintes coordenadas:

$$A = (x_1, y_1)$$

$$P = (x, y)$$

$$B = (x_2, y_2)$$

Seja também uma segunda trajetória $AP'B$ com os mesmos pontos terminais A e B , enquanto $P' = (x, y + \delta y)$; isto é, as coordenadas x de P e P' permanecem fixas. Isto define o que se chama de *variação δ da trajetória*, sujeita à limitação de extremos fixos, isto é:

$$\delta y_1 = \delta y_2 = 0$$

No mais, a variação é completamente arbitrária, desde que pequena. Podemos exprimir essa variação em termos de um parâmetro global dentro do

intervalo considerado, ou seja,

$$\delta y \equiv \eta \delta \alpha$$

onde α é o parâmetro comum a todos os pontos da trajetória e η uma função qualquer de x , sujeita à condição:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$$

Desta maneira, a variação correspondente de y' é dada por

$$\delta y' = \eta' \delta \alpha$$

O principal motivo para a restrição que fizemos de a variação ser pequena está no fato de que, sendo pequena, a integral sobre a trajetória variada poder ser obtida considerando-se somente os termos de primeira ordem em um desenvolvimento em série de Taylor do integrando, isto é,

$$I' = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \eta \delta \alpha + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \delta \alpha \right\} \quad (56)$$

de modo que

$$\delta I \equiv I' - I = \delta \alpha \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right\} \quad (57)$$

Integrando-se por partes o segundo termo e empregando-se as condições de extremos fixos, obtem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' = - \int_{x_1}^{x_2} dx \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (58)$$

de modo que

$$\delta I = \delta \alpha \int_{x_1}^{x_2} dx \eta \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} \quad (59)$$

Agora, a condição para que tenhamos o valor de I estacionário é que o valor de δI seja nulo para qualquer que seja a variação considerada. Desde

que a $\eta(x)$ é uma função arbitrária, forçosamente o integrando de δI acima deve ser nulo, isto é:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (60)$$

Observamos então que, as equações de Euler–Lagrange podem ser encaradas como o resultado do princípio de Hamilton para a Lagrangeana, i.e.,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) = 0. \quad (61)$$

A integral

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (62)$$

é conhecida como *função principal de Hamilton* ou também como *ação*.

Encarando-se a condição de valor estacionário para a ação como condutora às equações de Euler–Lagrange, nestes termos, o princípio de Hamilton pode ser modificado da seguinte maneira: A partir da definição da Hamiltoniana, podemos reescrever a Lagrangiana do sistema como:

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \quad (63)$$

e introduzir esta Lagrangiana na definição da ação, de tal modo que o princípio de Hamilton modificado se expressa como:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right\} = 0 \quad (64)$$

Neste presente caso, devemos ter o cuidado de observar que a variação de q_i e a variação de p_i são independentes, de modo que precisamos considerar

$$\begin{aligned} \delta q_i &= \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \delta \alpha = \eta_i \delta \alpha \\ \delta p_i &= \frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \delta \alpha = \zeta_i \delta \alpha \end{aligned}$$

onde os $\eta_i(t)$ e $\zeta_i(t)$ são funções arbitrárias de t , sujeitas às condições de extremos fixos, i.e.,

$$\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \zeta_i(t_1) = \zeta_i(t_2) = 0$$

Então,

$$\delta S = 0 \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (65)$$

que são reconhecidas como as equações canônicas de movimento de Hamilton.

4 COLCHETES DE POISSON

Quando da definição da Hamiltoniana, vimos que ela era considerada como uma função das variáveis canônicas q_i , p_i e t . No que se segue, vamos considerar uma variável dinâmica qualquer que seja representada por uma função que tenha esta dependência funcional, isto é, seja $F = F(q_i, p_i, t)$ essa variável dinâmica. Então sua derivada total em relação a t fica

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (66)$$

Utilizando-se as equações canônicas de Hamilton, esta expressão se transforma em:

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (67)$$

A quantidade

$$\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad (68)$$

desempenha um grande significado no desenvolvimento formal da mecânica, e é chamada de *colchetes de Poisson* de F e H . De modo geral, o colchetes

de Poisson entre duas variáveis dinâmicas quaisquer X e Y é definido como:

$$\{X, Y\}_{q,p} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i} \frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i} \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right). \quad (69)$$

Este conceito auxilia grandemente na verificação das constantes de movimento, como veremos a seguir. Sua importância se verifica também no fato de que esse formalismo, quando devidamente transcrito para a Mecânica Quântica, prove regras simples para a quantização *à la* Heisenberg.

A partir da definição do colchetes de Poisson, seguem-se imediatamente as seguintes identidades (omitiremos os índices q e p dos colchetes):

$$\begin{aligned} \{X, Y\} &= -\{Y, X\} \\ \{X, X\} &= 0 \\ \{X, Y + Z\} &= \{X, Y\} + \{X, Z\} \\ \{X, YZ\} &= Y\{X, Z\} + \{X, Y\}Z. \end{aligned} \quad (70)$$

Evidentemente, podemos tomar as próprias variáveis conjugadas como variáveis dinâmicas que entram no colchetes de Poisson. Neste caso, evidentemente teremos:

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_i\} &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (71)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \quad (72)$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j \quad (73)$$

As quantidades acima descritas são conhecidas como colchetes de Poisson básicos, ou fundamentais.

4.1 Constantes de Movimento

Como afirmamos anteriormente, os colchetes de Poisson se prestam a verificar rapidamente as constantes de movimento. Em termos da definição do colchetes de Poisson, temos que

$$\dot{F} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (74)$$

Esta expressão nos diz que, se a variável dinâmica F não depender explicitamente do tempo t , a condição necessária e suficiente para que ela seja uma constante de movimento é que o seu colchete de Poisson com a Hamiltoniana do sistema seja nulo. Os casos especiais da equação acima são:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\} \quad (75)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} \quad (76)$$

enquanto que

$$\dot{H} \equiv \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (77)$$

4.2 Identidade de Jacobi

Esta é uma identidade muito útil, e pode ser verificada diretamente da definição dos colchetes de Poisson:

$$\{X, \{Y, Z\}\} + \{Y, \{Z, X\}\} + \{Z, \{X, Y\}\} = 0 \quad (78)$$

Tomemos agora o caso em que $Z = H$ e suponhamos que X e Y sejam duas variáveis dinâmicas constantes de movimento, isto é,

$$\{X, H\} = 0 \quad (79)$$

$$\{Y, H\} = 0 \quad (80)$$

Então, de acordo com a identidade de Jacobi, temos que

$$\{H, \{X, Y\}\} = 0 \quad (81)$$

o que significa que $\{X, Y\}$ também é uma constante de movimento! A utilidade deste resultado reside no fato de que se conhecemos as constantes de movimento, novas constantes de movimento podem ser construídas a partir das primeiras.

5 UM RESUMO RESUMIDÍSSIMO DA MECÂNICA QUÂNTICA

5.1 O Espaço de Hilbert

Um espaço de Hilbert, \mathcal{H} , é por definição um conjunto de elementos chamados *vetores*

$$\{ |a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, \dots \}, \quad (82)$$

que tem as seguintes propriedades:

1. É um espaço vetorial linear sobre o campo dos números complexos, $(\mu, \nu, \lambda, \dots) \in \mathbf{C}$, tais que:
 - (a) Se $|a\rangle, |b\rangle$ e $|c\rangle$ são vetores de \mathcal{H} , então a soma de quaisquer pares deles, também de \mathcal{H} , é comutativa e associativa, isto é:

$$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle \quad (83)$$

$$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) \quad (84)$$

(b) Existe um vetor $|0\rangle$ de \mathcal{H} chamado vetor nulo, tal que

$$|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle, \quad \forall |a\rangle \quad (85)$$

(c) Para cada vetor $|a\rangle$ de \mathcal{H} , existe um vetor $|-a\rangle$, também de \mathcal{H} , tal que

$$|a\rangle + |-a\rangle = |0\rangle \quad (86)$$

(d) Para qualquer $\mu, \nu, \lambda, \dots \in \mathbf{C}$

$$\mu (|a\rangle + |b\rangle) = \mu |a\rangle + \mu |b\rangle \quad (87)$$

$$(\mu + \nu)|a\rangle = \mu |a\rangle + \nu |a\rangle \quad (88)$$

$$\mu\nu |a\rangle = \mu (\nu |a\rangle) \quad (89)$$

2. Define-se um *produto escalar* em \mathcal{H} , que denotamos $\langle a|b\rangle$, o qual é um número complexo, tal que

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* \quad (90)$$

$$\langle a|b+c\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle \quad (91)$$

$$\langle a|\lambda b\rangle = \lambda \langle a|b\rangle \quad (92)$$

5.2 Operadores no Espaço de Hilbert

Um operador linear O é definido como um mapeamento de \mathcal{H} em \mathcal{H} (ou um subconjunto de \mathcal{H}), tal que

$$O(\mu |a\rangle + \nu |b\rangle) = \mu O|a\rangle + \nu O|b\rangle \quad (93)$$

Dizemos que dois operadores A e B são iguais, se e somente se:

$$A | f \rangle = B | f \rangle \quad (94)$$

para todo $| f \rangle$ em \mathcal{H} . Definimos também os operadores identidade, nulo, soma e produto da seguinte maneira:

$$1 | f \rangle = | f \rangle \quad (95)$$

$$0 | f \rangle = | 0 \rangle \quad (96)$$

$$(A + B) | f \rangle = A | f \rangle + B | f \rangle \quad (97)$$

$$AB | f \rangle = A (B | f \rangle) \quad (98)$$

$$BA | f \rangle = B (A | f \rangle), \quad (99)$$

para todo $| f \rangle$ em \mathcal{H} . Em geral o produto de dois operadores não é comutativo, isto é, $AB \neq BA$. Definimos e chamamos

$$[A, B] = AB - BA \quad (100)$$

o *comutador* de A e B .

O operador adjunto A^\dagger é definido de tal modo que

$$\langle g | A | f \rangle = \langle f | A^\dagger | g \rangle^* \quad (101)$$

e tem as seguintes propriedades:

$$(\mu A)^\dagger = \mu^* A^\dagger \quad (102)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \quad (103)$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (104)$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A \quad (105)$$

Um operador é dito *Hermitiano*, se $A = A^\dagger$. Note que neste caso, isto é, se o operador é Hermitiano, então

$$\langle f | A | f \rangle = \langle f | A^\dagger | f \rangle^* = \langle f | A | f \rangle^* \quad (106)$$

o que significa que a quantidade acima definida é *real*.

5.3 Autovetores e Autovalores

Se A for um operador e existir um vetor $|A'\rangle \neq |0\rangle$ (o caso $|A'\rangle = |0\rangle$ é trivial) tal que

$$A |A'\rangle = \alpha' |A'\rangle, \quad (107)$$

onde α' é um número complexo, então dizemos que $|A'\rangle$ é um “*autovetor*” de A , de “*autovalor*” α' .

No caso de operadores *Hermitianos*, temos as seguintes propriedades:

- Os autovalores de operadores Hermitianos são *reais*;
- Se $|A'\rangle$ e $|A''\rangle$ são dois autovetores de um operador Hermitiano, $A = A^\dagger$, e $\alpha' \neq \alpha''$, então $\langle A' | A'' \rangle = 0$;

Um vetor arbitrário pode ser expandido em componentes de uma base de vetores linearmente independentes,

$$|\psi\rangle = \sum_{A'} |A'\rangle \langle A' | \psi \rangle, \quad (108)$$

com

$$\langle A' | A'' \rangle = \delta_{A'A''} \quad (109)$$

O produto escalar de dois vetores pode então ser expresso por

$$\langle \phi | \psi \rangle = \sum_{A'} \langle \phi | A' \rangle \langle A' | \psi \rangle \quad (110)$$

Uma regra mnemônica prática para se lembrar destas propriedades, é escrever o operador unitário como

$$1 = \sum_{A'} | A' \rangle \langle A' | \quad (111)$$

de modo que

$$| \psi \rangle = 1 | \psi \rangle = \sum_{A'} | A' \rangle \langle A' | \psi \rangle \quad (112)$$

e o produto escalar

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | 1 | \psi \rangle = \sum_{A'} \langle \phi | A' \rangle \langle A' | \psi \rangle \quad (113)$$

5.4 Transformações Unitárias

Um operador U é dito ser *unitário* se $U^{-1} = U^\dagger$. Isto implica que $U^\dagger U = U^{-1} U = 1$. Dizemos então que uma transformação é unitária se operada por um operador unitário, i.é., um vetor se transforma como

$$| A' \rangle_{\text{novo}} = U | A' \rangle_{\text{antigo}} \quad (114)$$

enquanto os operadores correspondentes se transformam como

$$A_{\text{novo}} = U A_{\text{antigo}} U^\dagger \quad (= U A_{\text{antigo}} U^{-1}) \quad (115)$$

Então, numa *transformação unitária*, os produtos escalares são *invariantes* e os *autovalores de um dado autovetor são invariantes também*. Vejamos:

$$\begin{aligned} \text{novo } \langle B' | A' \rangle_{\text{novo}} &= \text{antigo } \langle B' | U^\dagger U | A' \rangle_{\text{antigo}} & (116) \\ &= \text{antigo } \langle B' | A' \rangle_{\text{antigo}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_{\text{novo}} | A' \rangle_{\text{novo}} &= U A_{\text{antigo}} U^\dagger U | A' \rangle_{\text{antigo}} & (117) \\ &= \alpha' | A' \rangle_{\text{novo}} \end{aligned}$$

5.5 Os Axiomas da Mecânica Quântica

Supomos as seguintes correspondências entre as quantidades físicas e os objetos matemáticos definidos nas seções precedentes:

1. O estado de um sistema físico corresponde ao vetor raio de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Isto significa que tanto $|\psi\rangle$ quanto $\mu|\psi\rangle$ representam um mesmo estado; em geral os vetores de estado são normalizados a um.
2. Os observáveis dinâmicos de um sistema físico correspondem aos “*operadores observáveis*” em \mathcal{H} . Por um operador observável entendemos um operador Hermitiano (autovalor real) cujos autovetores formam uma base na qual qualquer vetor de \mathcal{H} pode ser expandido.

Temos também os axiomas físicos básicos:

- **AXIOMA 1:** O resultado de qualquer medida de um observável pode ser somente um dos autovalores do operador correspondente. Como resultado de u'a medida, o sistema encontra-se no estado representado pelo autovetor correspondente.
- **AXIOMA 2:** Se um determinado sistema encontra-se num estado $|A' \rangle$, então a probabilidade de uma medida de B resultar num valor β' é dada por

$$P(A', B') = | \langle A' | B' \rangle |^2 \quad (118)$$

No caso de B ter um espectro contínuo, então $| \langle A' | B' \rangle |^2 dB'$ é a probabilidade de B ter um valor no intervalo entre β' e $\beta' + d\beta'$.

- **AXIOMA 3:** Os operadores A e B que correspondem às variáveis dinâmicas clássicas A e B satisfazem a seguinte relação de comutação:

$$[A, B] = AB - BA = i \hbar \{A, B\}_{\text{operadores}} \quad (119)$$

onde $\{A, B\}_{\text{operadores}}$ é o correspondente em termos de operadores dos colchetes de Poisson clássico:

$$\{A, B\} = \sum_i \left\{ \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right\} \quad (120)$$

onde q_i e p_i são a coordenada e o momento clássicos do sistema. Deduz-se facilmente daí que

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= 0, \\ [p_i, p_j] &= 0, \\ [q_i, p_j] &= i \hbar \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (121)$$

- **AXIOMA 4:** Se $|\psi_{t_0}\rangle$ representa o estado do sistema no instante t_0 e $|\psi_t\rangle$ o estado do mesmo num instante t posterior, então os dois estados estão relacionados por uma transformação unitária

$$|\psi_t\rangle = U(t - t_0) |\psi_{t_0}\rangle \quad (122)$$

onde

$$U(t - t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H(t - t_0)\right\} \quad (123)$$

com H sendo o operador Hamiltoniana do sistema. Em termos infinitesimais, tomando-se $t - t_0 = dt$ e $|\psi_{t_0+dt}\rangle - |\psi_{t_0}\rangle = d|\psi\rangle$ e

$$U(dt) = 1 - \frac{i}{\hbar}H dt \quad (124)$$

concluimos que

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \quad (125)$$

Esta é justamente a [equação de Schrödinger](#). U'a maneira equivalente de se descrever a dinâmica do sistema é usar a [representação de Heisenberg](#). Para tanto, considere $U = U(t - t_0)$ e a seguinte transformação unitária:

$$\begin{aligned} |\psi_t\rangle_{\mathbf{H}} &= U^{-1} |\psi_t\rangle_{\mathbf{S}} \\ &= U^{-1}U |\psi_{t_0}\rangle_{\mathbf{S}} \\ &= |\psi_{t_0}\rangle_{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (126)$$

e

$$A_{\mathbf{H}}(t) = U_t^{-1} A_{\mathbf{S}} U_t \quad (127)$$

onde os sub-índices \mathbf{S} e \mathbf{H} denotam respectivamente as representações de Schrödinger e de Heisenberg. O operador $|\psi_t\rangle_{\mathbf{H}} = |\psi_{t_0}\rangle_{\mathbf{S}}$ é um vetor fixo (independente do tempo), enquanto o operador

$$A_{\mathbf{H}}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} A_{\mathbf{S}} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \quad (128)$$

é dependente do tempo. Diferenciando, encontramos que $A_{\mathbf{H}}(t)$ obedece a seguinte equação:

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} A_{\mathbf{H}} = A_{\mathbf{H}} H - H A_{\mathbf{H}} = [A_{\mathbf{H}}, H] \quad (129)$$

que é a *equação de movimento de Heisenberg* para o operador $A_{\mathbf{H}}$. Esta pode ser comparada com a equação clássica (para A não dependente do tempo explicitamente)

$$\dot{A} \equiv \frac{dA}{dt} = \{A, H\} \quad (130)$$

Deduzimos igualmente que se um operador A comuta com o operador Hamiltoniana do sistema, A é uma constante de movimento.

6 RELATIVIDADE ESPECIAL E DINÂMICA RELATIVÍSTICA: NOÇÕES

As leis da Mecânica newtoniana são uma boa aproximação para a descrição de sistemas onde as velocidades envolvidas são muito menores que a velocidade da luz. Uma descrição mais geral, que englobe sistemas eletromagnéticos, onde as velocidades envolvidas são a da própria luz, demanda uma descrição mais acurada e precisa que a da Mecânica de Newton. A Relatividade Restrita ou Especial se presta para tanto. Em suma, os dois postulados fundamentais da Relatividade Especial são:

(a) As leis da natureza, sejam elas mecânicas ou eletromagnéticas, tem a mesma forma para todos os observadores inerciais;

(b) Para todos os observadores inerciais, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas é a mesma sendo independente da direção de propagação.

Estes postulados implicam em que não há mais um tempo comum para todos os referenciais inerciais, como é pressuposta na mecânica newtoniana (transformação de Galileu). Além disso, pelo postulado (b) acima, torna-se evidente que se a velocidade da luz é a mesma em todas as direções, isto implica que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (131)$$

no sistema inercial S e

$$(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 - c^2 (t')^2 = 0 \quad (132)$$

no sistema inercial S' . Desejamos portanto, uma lei de transformação que garanta estas propriedades para quaisquer x_1, x_2, x_3, t . Tal transformação, chamada *transformação de Lorentz*, deve manter então a identidade

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 t^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 - c^2 (t')^2 \quad (133)$$

Em uma descrição mais elegante, devida a Minkowski, definimos

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad , \quad x_4 \equiv ict$$

um vetor quadridimensional, de tal modo que o ponto neste espaço quadridimensional identifica o que se denomina de *evento*. A transformação de Lorentz é uma transformação ortogonal neste espaço de quatro dimensões que mantém o “comprimento” invariante, i.é.

$$\sum_{\mu} x_{\mu}^2 = \sum_{\mu} (x'_{\mu})^2, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (134)$$

O *tempo próprio* entre dois eventos x e y é definido como:

$$\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\sum_{\mu} (x_{\mu} - y_{\mu})^2} \quad (135)$$

de tal modo que é uma quantidade invariante (ou escalar), já que ela representa o comprimento de um quadrivetor. O movimento de uma partícula pode ser considerado como uma sucessão contínua de eventos formando uma curva no espaço de Minkowski. O intervalo infinitesimal invariante entre dois eventos sucessivos sobre esta curva será:

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\sum_{\mu} (dx_{\mu})^2} = dt \sqrt{1 - \beta^2} \quad (136)$$

onde $\beta c = \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2} = v$ representa a velocidade da partícula.

Observe que não mais temos $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ formando componentes de um vetor como acontecia na mecânica Newtoniana, uma vez que o próprio tempo t passa a ser uma componente do quadrivetor, ao invés de ser um escalar.

Definimos um quadrivetor velocidade genuíno por intermédio de:

$$u_{\mu} \equiv \frac{dx_{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dx_{\mu}}{dt} \quad , \quad (137)$$

de modo que as componentes espaciais deste quadrivetor obviamente coincidem com a componentes usuais da velocidade tridimensional no limite não relativístico, i.é, $\beta \rightarrow 0$. Por causa disto, justificamos chamar o quadrivetor acima definido como quadrivetor velocidade. A componente temporal deste quadrivetor, evidentemente é dada por:

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (138)$$

O comprimento invariante do quadrivetor velocidade torna-se:

$$\sum_{\mu} u_{\mu}^2 = -c^2 \quad (139)$$

uma vez que:

$$\sum_{\mu} u_{\mu}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \quad (140)$$

$$= \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2}{1 - \beta^2} \quad (141)$$

$$= \frac{\vec{\dot{x}}^2 - c^2}{1 - \beta^2} \quad (142)$$

$$= -c^2 \frac{(1 - \vec{\dot{x}}^2/c^2)}{1 - \beta^2} \quad (143)$$

$$= -c^2 \quad (144)$$

Em seguida, postulamos que a cada partícula está associada uma quantidade invariante que chamamos de **massa**, m . Sendo assim, definimos o quadrivetor momento da seguinte forma:

$$p_{\mu} = m u_{\mu} \quad (145)$$

de tal modo que as três componentes espaciais correspondem às três componentes usuais do momento em três dimensões, enquanto a quarta componente, temporal, é da forma:

$$p_4 = \frac{imc}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (146)$$

Esta quarta componente é identificada com a **energia**, como veremos a seguir.

6.1 Leis de Newton

Na Mecânica Newtoniana, tínhamos definido

força = taxa de variação do momento em relação ao tempo

Em analogia, definiremos aqui a *força* nestes termos, i. é.,

$$F_\mu = \frac{d}{dt} p_\mu = \frac{d}{dt} (m u_\mu), \quad (147)$$

e a *energia cinética* (mais propriamente a taxa de variação da mesma em relação ao tempo) como:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \sum_i F_i \dot{x}_i \\ &= \sum_i \left[\frac{d}{dt} (m u_i) \right] \sqrt{1 - \beta^2} u_i \\ &= \sum_\mu \sqrt{1 - \beta^2} u_\mu \frac{d}{dt} (m u_\mu) - \sqrt{1 - \beta^2} u_4 \frac{d}{dt} (m u_4) \\ &= -\sqrt{1 - \beta^2} \frac{ic}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dp_4}{dt} \\ &= -ic \frac{dp_4}{dt} \end{aligned}$$

o que resolvida dá

$$p_4 = \frac{i}{c} (T + \text{constante}). \quad (148)$$

Para determinar a constante de integração acima, considere que a energia cinética de uma partícula em repouso deve ser nula, e quando isto ocorre, isto é, no caso $\beta = 0$ temos da definição de quadrimomento que:

$$p_4 = imc = \frac{i}{c} (0 + \text{constante}) \Rightarrow \text{constante} = m c^2 \quad (149)$$

Esta nos conduz à famosíssima equação de Einstein

$$\text{constante} \equiv E_0 = m c^2. \quad (150)$$

Então, de maneira geral escrevemos:

$$p_4 = \frac{i}{c} (T + m c^2) = \frac{iE}{c} \quad (151)$$

Desde que $\sum_{\mu} p_{\mu}^2 = -m^2 c^2 = \vec{p}^2 - E^2/c^2$, temos a relação entre energia e trimomento:

$$E^2 = (T + mc^2)^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (152)$$

7 CAMPOS CLÁSSICOS

7.1 Partículas e Campos

De 1923 a 1926 a Mecânica Quântica Não Relativística (MQNR) possibilitou uma descrição unificada e consistente para numerosos fenômenos físicos nas escalas atômica e molecular, que a Mecânica Clássica não era capaz de formular consistentemente. Entretanto, embora a MQNR tenha dado um impulso na descrição do mundo microscópico com relativo sucesso, há duas razões fundamentais para se crer que sua descrição de um fenômeno físico seja incompleta:

- A MQNR é formulada de tal maneira que resulte na relação energia–momento não relativística no limite clássico. Desta forma, é incapaz de dar contas da estrutura fina de átomos de hidrogênio. Em geral, a MQNR não faz nenhuma previsão quanto ao comportamento dinâmico das partículas movendo–se a velocidades relativísticas. Isto foi corrigido com a teoria relativística desenvolvida por P.A.M.Dirac em 1928;
- A MQNR é essencialmente uma *teoria de partícula única*, na qual a densidade de probabilidade de se encontrar tal partícula integrada sobre todo o espaço é unitária em qualquer instante. Assim, não é possível

descrever processos como o decaimento beta do núcleo atômico, onde um elétron e um neutrino são criados quando um neutron se torna em pósitron.

Assim, para compreender os fenomenos físicos nos quais várias partículas são criadas ou destruídas, há a necessidade de se ir além da MQNR. E o ferramental que se utiliza para esse propósito chama-se **Teoria Quântica de Campos (TQC)**. Dita de modo um tanto sem rigor, diríamos que a TQC, incorpora os conceitos da Mecânica Quântica (MQ) e a formulação clássica de campos da Relatividade Restrita (RR).

Classicamente, o conceito de campo é introduzido no contexto de interações entre dois objetos separados entre si por uma certa distancia finita. Por exemplo, na física clássica, o campo elétrico $\vec{E}(\vec{x}, t)$ é uma função vetorial de três componentes definidos a cada ponto do espaço-tempo, sendo que a interação entre dois objetos eletricamente carregados é vista como a interação entre um deles e o campo elétrico gerado pelo outro.

Na TQC, o conceito de campo tem u'a dimensão mais abrangente, no sentido de que no seu desenvolvimento, há a possibilidade de se associar partículas aos campos:

$$\text{partículas} \Leftarrow (\text{TQC}) \Rightarrow \text{campos}$$

Estas partículas são possíveis de serem associadas aos diversos campos da TQC quando princípios gerais da RR como a invariância de Lorentz e a interpretação probabilística dos vetores de estado (MQ) são devidamente considerados na formulação dos diversos campos. Em particular, duas propriedades características emergem da teoria quântica relativística de campos, quais sejam:

- Para cada partícula carregada, deve haver uma correspondente anti-partícula de carga oposta, porém de igual massa e duração. (Partículas neutras são anti-partículas de si mesmas.)
- As partículas obedecem a conexão spin-estatística (W. Pauli, 1940), isto é, partículas de spin semi-inteiro como o elétron, o próton, etc., obedecem a estatística de Fermi-Dirac, enquanto partículas de spin inteiro, como o fóton, o píon, etc., obedecem a de Bose-Einstein.

Entretando, mister se faz mencionar que nem tudo são águas mansas na quantização dos campos. Existem dificuldades e sutilezas características, entre elas, por exemplo, a necessidade de renormalização dos parâmetros envolvidos na teoria — o que nem sempre é viável, sendo-o somente em certos casos, ditos teorias renormalizáveis —, a geração de um sem-número de partículas associadas às interações fortes, sem mencionar a dificuldade intrínseca associada à quantização do campo gravitacional.

Contudo, deixando de lado estes aspectos mais técnicos e como um passo introdutório à quantização dos campos, vamos estudar, como nosso objetivo neste curso, algumas propriedades dinâmicas dos campos clássicos, necessários à compreensão dos campos quantizados. Para tanto, utilizaremos o ferramental desenvolvido até aqui da formulação de Hamilton da mecânica Lagrangeana.

7.2 Sistemas mecânicos discretos e contínuos

Como vimos, u'a maneira equivalente e quiçá mais econômica e elegante de se estudar a dinâmica de uma partícula na mecânica clássica é descrita pelas

equações de movimento de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (153)$$

que resultam do princípio variacional de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) = 0, \quad (154)$$

onde o símbolo $\delta \dots$ representa:

$$\delta \dots \equiv \left(\frac{\partial \dots}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} d\alpha$$

define a variação da quantidade \dots obtida pela variação do parâmetro arbitrário α em torno do valor $\alpha = 0$.

A Lagrangeana é dada pela diferença entre a energia cinética e a potencial

$$L = T - V$$

e a variação acima referida deve ser tomada sobre uma trajetória arbitrária $q_i(t)$ tal que os extremos estejam fixos, isto é, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

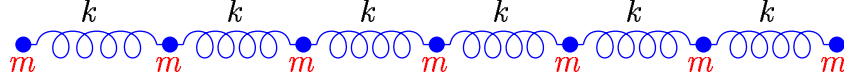
A Hamiltoniana do sistema é dada por

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

onde os momentos p_i canonicamente conjugados a q_i são dados por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Consideremos agora um sólido unidimensional, por simplicidade. E para descrevê-lo, tomemos como modelo do mesmo, um sistema de muitas partículas como uma sequência linear de N esferas de massa m interligadas entre si por molas de mesma constante elástica k .



Esferas de massa m ligadas por molas de constante k

A sua Lagrangeana se escreve então como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{m \dot{q}_i^2 - k(q_{i+1} - q_i)^2\} \quad (155)$$

$$= \sum_{i=1}^N a \frac{1}{2} \left\{ \frac{m}{a} \dot{q}_i^2 - k a \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \right)^2 \right\} \quad (156)$$

$$= \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i \quad (157)$$

onde a é a separação de equilíbrio entre duas esferas consecutivas e \mathcal{L}_i a densidade linear de Lagrangeana, ou seja a Lagrangeana do sistema por unidade de comprimento.

Desejamos passar agora, do sistema discreto para o contínuo, de modo que o número de graus de liberdade se torne infinito, ao mesmo tempo em que a separação a se torna infinitesimal, isto é, estabelecemos as seguintes “regras de continuação”:

$$a \rightarrow dx \quad (158)$$

$$\frac{m}{a} \rightarrow \mu \quad (\text{densidade linear de massa}) \quad (159)$$

$$ka \rightarrow Y \quad (\text{módulo de Young}) \quad (160)$$

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{a} \rightarrow \frac{\partial q}{\partial x} \quad (161)$$

$$\sum_i^N \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \quad (162)$$

Então:

$$L = \int dx \mathcal{L} \quad (163)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ \mu \dot{q}^2 - Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right\}. \quad (164)$$

Note que $q = q(x, t)$ tornou-se uma função dos parâmetros contínuos x e t . O princípio variacional no caso contínuo é:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \mathcal{L}(q, \dot{q}, q') = 0 \quad (165)$$

onde

$$q' \equiv \frac{\partial q}{\partial x} \quad (166)$$

Assumimos, evidentemente, que a variação de q se anula em t_1 e t_2 , bem como nos extremos de integração espacial, i.é.,

$$\delta q(t = t_1) = \delta q(t = t_2) = 0 \quad (167)$$

$$\delta q(x = -\infty) = \delta q(x = +\infty) = 0 \quad (168)$$

Na Teoria de Campos, este último quesito é sempre subentendido, a menos que expressamente declarado em contrário, já que usualmente se consideram campos que vão a zero rapidamente no infinito.

Expandindo explicitamente a variação

$$\delta \int dt L = 0, \quad (169)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \delta q' \right\} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \delta q \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \right\} \delta q &= 0 \\ \int dt \int dx \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \right\} \delta q &= 0 \end{aligned}$$

onde usamos

$$\begin{aligned}\delta\dot{q} &\equiv \frac{\partial\delta q}{\partial t} \\ \delta q' &\equiv \frac{\partial\delta q}{\partial x}\end{aligned}$$

e utilizamos a condição de extremos fixos,

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta q(x = -\infty) = \delta q(x = +\infty) = 0$$

Como a variação δq é arbitrária, segue-se que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'} = 0 ,$$

que é a equação de Euler–Lagrange. No caso particular da densidade Lagrangeana que calculamos acima para o sólido unidimensional, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} &= 0 , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} &= \mu\dot{q} , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'} &= -Yq' ,\end{aligned}$$

ou seja, a equação de Euler–Lagrange para este caso particular é:

$$\mu\ddot{q} - Yq'' = 0 \tag{170}$$

que, escrita de outro modo, lê-se:

$$\mu\frac{d^2q}{dt^2} - Y\frac{d^2q}{dx^2} = 0 \tag{171}$$

Esta é exatamente a equação de onda para uma propagação linear de uma perturbação com velocidade $\sqrt{Y/\mu}$.

Podemos definir a densidade de Hamiltoniana \mathcal{H} em analogia com a densidade Lagrangeana,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \\ &= \mu(\dot{q})^2 - \frac{1}{2}\mu(\dot{q})^2 + \frac{1}{2}Y(q')^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\end{aligned}$$

A quantidade $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ é chamada de momento canonico conjugado a q e é usualmente denotado por π . Notamos que os dois termos da última expressão podem ser identificados com as densidades de energia cinética e potencial, de modo que a densidade Hamiltoniana, *neste caso*, representa a densidade de energia mecânica total. Nem sempre esta identificação da Hamiltoniana com a energia total se verifica.

7.3 Campos Escalares Clássicos

7.3.1 Notação covariante:

Os resultados da seção anterior podem ser facilmente generalizados para três dimensões. Consideremos um campo que supomos ser dado por uma função *real* definida em cada ponto do espaço-tempo (\vec{x}, t) , isto é, $\phi = \phi(\vec{x}, t)$. A densidade de Lagrangiana \mathcal{L} dependerá agora de ϕ , $\partial\phi/\partial x_k$, $k = 1, 2, 3$ e $\partial\phi/\partial t$, de modo que a equação de Euler–Lagrange será dada por:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi/\partial x_k)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial\phi/\partial t)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0.$$

O que queremos é reescrever esta equação de uma forma relativisticamente covariante. Para tanto, lembremo-nos de algumas propriedades das

transformações de Lorentz. Havíamos definido a seguinte notação para um quadrivetor genérico b_μ , com $\mu = 1, 2, 3, 4$:

$$b_\mu = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (\vec{b}, ib_0),$$

com b_k , $k = 1, 2, 3$ real e $b_4 = ib_0$ imaginário puro (b_0 real). O quadrivetor coordenada é dado por $x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict) = (\vec{x}, ict)$, e a transformação de Lorentz para um direção de \vec{v} arbitrária é dada por:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \frac{(\vec{x} \cdot \vec{v})}{v^2} \vec{v} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{v}t \quad (172)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c^2} \right), \quad (173)$$

ou, como é usualmente feito, sob as definições

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (174)$$

$$\vec{\beta} = c\vec{v}, \quad (175)$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (176)$$

Para $\vec{v} = v\hat{i}$, i. é., velocidade na direção do eixo x , temos:

$$y' = y, \quad (177)$$

$$z' = z, \quad (178)$$

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (179)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2). \quad (180)$$

A transformação de Lorentz é uma transformação linear entre as coordenadas do espaço-tempo (x, y, z, t) ou (x_1, x_2, x_3, ict) e (x', y', z', t') , sujeita ao vínculo:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - c^2(t')^2, \quad (181)$$

ou seja,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (x'_3)^2 + (x'_4)^2 , \quad (182)$$

que pode ser escrito em notação abreviada

$$\sum_{\mu=1}^4 x_\mu x_\mu = \sum_{\mu=1}^4 x'_\mu x'_\mu \Rightarrow x^2 = (x')^2 . \quad (183)$$

Desta forma, o que se estabelece é que o quesito acima é exatamente a afirmação de que as transformações de Lorentz são *rotações* no espaço Euclidiano de quatro dimensões, i. é., transformações *ortogonais* em quatro dimensões.

Evidentemente, podemos ainda economizar em notação, escrevendo as transformações de Lorentz de u'a maneira geral,

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu , \quad \mu = 1, 2, 3, 4 , \quad (184)$$

onde $a_{\mu\nu}$ são os coeficientes característicos da particular transformação. A invariância $x^2 = (x')^2$ impõe vínculos aos coeficientes:

$$\sum_{\mu=1}^4 x_\mu x_\mu = \sum_{\mu=1}^4 x'_\mu x'_\mu \quad (185)$$

$$= \sum_{\mu=1}^4 \left(\sum_{\nu=1}^4 a_{\mu\nu} x_\nu \sum_{\rho=1}^4 a_{\mu\rho} x_\rho \right) \quad (186)$$

$$= \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\rho=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\rho} x_\nu x_\rho . \quad (187)$$

Assim, emerge a seguinte condição de ortogonalidade:

$$\sum_{\mu=1}^4 a_{\mu\nu} a_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho} . \quad (188)$$

Como é costumeiro, adotaremos aqui a notação de Einstein, na qual índices repetidos significam somatória nesses índices. Consideremos agora a transformação inversa do sistema linha para o sistema sem linha

$$x_\mu = (a^{-1})_{\mu\nu} x'_\nu \quad ; \quad ; \mu = 1, 2, 3, 4 \quad , \quad (189)$$

onde a somatória em ν de 1 a 4 está subentendida. Por outro lado, temos que:

$$x'_\nu = a_{\nu\rho} x_\rho \quad (190)$$

que, multiplicado em ambos os lados por $a_{\nu\mu}$ resulta em:

$$a_{\nu\mu} x'_\nu = a_{\nu\mu} a_{\nu\rho} x_\rho \quad (191)$$

$$= \delta_{\mu\rho} x_\rho \quad (192)$$

$$= x_\mu \quad (193)$$

de onde se conclui que:

$$(a^{-1})_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \quad (194)$$

isto é,

$$x_\mu = (a^{-1})_{\mu\nu} x'_\nu = a_{\nu\mu} x'_\nu. \quad (195)$$

A invariância de $x^2 = (x')^2$ nos conduz à relação:

$$a_{\nu\mu} a_{\rho\mu} = \delta_{\nu\rho} \quad (196)$$

Em notação matricial, estas equações são escritas:

$$X' = AX \quad (197)$$

$$(X')^T = X^T A^T \quad (198)$$

$$(X')^T X' = X^T A^T A X \Leftrightarrow X^T X \quad (199)$$

$$A^T A = I \Rightarrow \det(A^T A) = 1 \quad (200)$$

$$\det(A^T) \det(A) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \quad (201)$$

(i) Quaisquer conjuntos de quatro quantidades b_μ que se transformam de mesmo modo que x_μ são denominados de *quadrivetores*;

(ii) Se uma quantidade ϕ permanece inalterada por uma transformação de Lorentz, esta é denominada de um *escalar de Lorentz*, ou simplesmente *escalar* ;

(iii) As quatro quantidades formadas pela diferenciação de um escalar de Lorentz com respeito a x_μ é um *quadrivetor*, i. é., transforma-se como x_μ ;

• Prova:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x'_\mu} &= \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \\ &= a_{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu}\end{aligned}$$

Em outras palavras, o quadrivergente é um quadrivetor:

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} . \quad (202)$$

(iv) A quadrivergência de um quadrivetor é um invariante de Lorentz;

• Prova:

$$\begin{aligned}\frac{\partial b'_\mu}{\partial x'_\mu} &= \frac{\partial(a_{\mu\nu} b_\nu)}{\partial x_\rho} \frac{\partial x_\rho}{\partial x'_\mu} \\ &= \frac{\partial(a_{\mu\nu} a_{\mu\rho} b_\nu)}{\partial x_\rho} \\ &= \frac{\partial b_\rho}{\partial x_\rho} .\end{aligned}$$

(v) O operador Laplaciano quadridimensional (D'Alambertiano) é um operador invariante de Lorentz.

- Exercício: Mostre isso!

(vi) O produto escalar de dois quadrivetores é um invariante de Lorentz.

- Exercício: Mostre isso!

(vii) Um tensor de segundo “rank” é um conjunto de dezesseis quantidades que se transformam de acordo com

$$T'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda} a_{\nu\sigma} T_{\lambda\sigma} \quad (203)$$

(viii) O elemento de volume no espaço quadridimensional é definido como a quantidade real

$$d^4x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 \quad (204)$$

onde $dx_0 = -i dx_4 = d(ct)$. A lei de transformação do elemento de volume é

$$d^4x' = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} d^4x \quad (205)$$

$$= |J| d^4x, \quad (206)$$

onde $J = \pm 1$, de modo que o elemento de volume é um invariante de Lorentz.

As equações de Euler–Lagrange são escritas em notação covariante do seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (207)$$

ou, como é comumente feito, utilizamos a definição:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (208)$$

de modo que as equações de Euler–Lagrange são escritas:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad (209)$$

indicando que as equações de campo (de Euler–Lagrange) obtidas da densidade Lagrangiana \mathcal{L} serão *covariantes* se \mathcal{L} for um *escalar* de Lorentz. Este ponto é importante ser salientado, uma vez que a invariância relativística de \mathcal{L} é restritiva no que diz respeito às possibilidades de \mathcal{L} e serve como guia para a obtenção de equações covariantes.

7.4 Campo Escalar Neutro

Um campo $\phi(x)$, é por definição um *campo escalar*, quando

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (210)$$

por uma transformação de Lorentz, onde $x'_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu$ e ϕ' é o campo observado pelo observador do sistema “linha”.

A dependência de \mathcal{L} nas coordenadas do espaço–tempo deve aparecer através da forma funcional do campo e suas primeiras derivadas; x_μ não deve aparecer explicitamente em \mathcal{L} , uma vez que \mathcal{L} deve ser também *invariante translacional*. Desta forma, $\partial_\mu\phi$ é o único quadrivetor disponível para a “construção” de \mathcal{L} . Como a densidade Lagrangiana deve ser um *escalar* de Lorentz, o quadrivetor $\partial_\mu\phi$ deve aparecer contraído com ele mesmo.

Além disso, se estivermos interessados em uma equação de onda linear, a densidade Lagrangiana só poderá conter termos que sejam no máximo funções quadráticas de ϕ e $\partial_\mu\phi$.

Diante destas ressalvas, um possível candidato satisfazendo aos quesitos acima é:

$$\mathcal{L} = \alpha [(\partial_\mu\phi)^2 + \lambda^2\phi^2] \quad (211)$$

As equações de Euler–Lagrange para tal densidade Lagrangiana serão, então:

$$(-\partial^2 + \lambda^2)\phi = 0 \quad (212)$$

$$(\square - \lambda^2)\phi = 0 \quad (213)$$

onde

$$\square \equiv \partial^2 \equiv \partial_\mu \partial_\mu = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (214)$$

A equação de onda acima (equações do campo escalar) é conhecida como a equação de *Klein–Gordon*. Esta equação foi considerada em meados da década de '20 por E. Schrödinger, O. Klein e W. Gordon, como uma candidata para o análogo relativístico da equação de Schrödinger não relativística para uma partícula livre. Isto porque, se considerarmos a relação energia momento para uma partícula livre relativística de massa m ,

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (215)$$

e considerando-se as substituições heurísticas

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (216)$$

$$p_k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (217)$$

das variáveis dinâmicas clássicas com os operadores quânticos, obtemos:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2} + m^2 c^4 \phi \quad (218)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (219)$$

de modo que, se identificarmos $\lambda = mc/\hbar$, obtemos a equação de Klein–Gordon acima.

Assim como a equação de Schrödinger forma a base para a mecânica quântica não relativística, esperava-se que a equação de Klein-Gordon pudesse servir de base para uma teoria quântica relativística geral. Sabemos agora, contudo, que o campo de Klein-Gordon pode descrever somente partículas de spin 0.

A maior dificuldade encontramos desde já o seu início. As soluções do tipo *ondas planas* da equação (213) são da forma

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-Et)}$$

com $\vec{k}^2 - E^2 = -\lambda^2$, ou, seja, $E = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + \lambda^2}$. Vemos claramente que há soluções de energia positiva e soluções de energia negativa. Para formar um conjunto completo de soluções podemos tomar o conjunto de todas as exponenciais

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)}$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)}$$

com $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + \lambda^2}$. O fator de normalização $(2\omega_{\vec{k}}V)^{-1/2}$ é escolhido por conveniência e supomos condições de contorno periódicas na superfície do volume V .

Desta forma o campo escalar real $\phi(\vec{x}, t)$ pode ser expandido em termos de um conjunto completo de soluções de ondas planas de modo que

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left[a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} + a_{\vec{k}}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} \right], \quad (220)$$

onde a condição de campo real para ϕ requer que os coeficientes de $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ e $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ sejam complexos conjugados entre si.

7.4.1 Análise de Fourier

Vimos que um campo pode ser visto como um sistema mecânico com um número infinito de graus de liberdade, considerando o valor do campo em cada ponto do espaço tridimensional como uma variável dinâmica independente.

Uma representação mecânica alternativa para o campo pode ser obtida via decomposição em *modos normais*. Supondo que a densidade Lagrangeana $\mathcal{L}(\phi_n, \partial_\mu \phi_n)$ seja uma função de N campos ($n = 1, \dots, N$), podemos expandir ϕ_n em termos de um conjunto de funções ortonormais $\varphi_m(\vec{x})$:

$$\phi_n(\vec{x}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m^n(t) \varphi_m(\vec{x}), \quad (221)$$

onde temos as seguintes relações de ortogonalidade/completeza:

$$\int_V d^3x \varphi_l^*(\vec{x}) \varphi_m(\vec{x}) = \delta_{lm}, \quad (222)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^*(\vec{x}) \varphi_m(\vec{y}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (223)$$

sendo V o volume de normalização. Queremos mostrar que os coeficientes $q_m^n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$ formam um conjunto infinito de coordenadas canônicas para o campo.

A Lagrangeana L , dada por

$$L = \int_V d^3x \mathcal{L}(\phi^n, \nabla \phi^n, \dot{\phi}^n), \quad (224)$$

é uma função dos q_m^n e \dot{q}_m^n . A derivada de L em relação a esses coeficientes será então

$$\frac{\partial L}{\partial q_m^n} = \int_V d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^n} \varphi_m(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi^n)} \nabla \varphi_m(\vec{x}) \right) \quad (225)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m^n} = \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^n} \varphi_m(\vec{x}), \quad (226)$$

respectivamente, onde usamos evidentemente a expansão em modos normais análoga a (221) para $\dot{\phi}^n$. Integrando por partes em (308), e supondo condições de contorno periódicas na superfície de V podemos reescrever a equação como

$$\frac{\partial L}{\partial q_m^n} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^n} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi^n)} \right) \varphi_m(\vec{x}), \quad (227)$$

que combinada com a (226) resulta na equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m^n} = \frac{\partial L}{\partial q_m^n} \quad (228)$$

desde que

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_n)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_n}, \quad (229)$$

e a relação de completeza de $\varphi_m(\vec{x})$. Da (228) deduzimos que os coeficientes $q_m^n(t)$ formam um conjunto infinito de coordenadas canônicas para o campo ϕ . Então a expansão

$$\phi^n(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} q_{\vec{k}}^n(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (230)$$

nos diz que, comparada com (220) resulta em

$$q_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + a_{\vec{k}}^* e^{i\omega_{\vec{k}}t} \right) \quad (231)$$

Evidentemente muitos outros conjuntos de funções $\varphi_m(\vec{x})$ que satisfazem relações de ortogonalidade e completeza estão disponíveis para a expansão de $\phi^n(\vec{x}, t)$.

7.4.2 Campos conjugados

A expansão acima descrita para os campos ϕ pode ser estendida naturalmente para os campos conjugados do formalismo Hamiltoniano, ou seja,

$$\pi(\vec{x}, t) = \sum_n p_n(t) \varphi_n^*(\vec{x}), \quad (232)$$

onde identificamos os $p_n(t)$ como momentos canonicamente conjugados às coordenadas $q_n(t)$. Note que aqui temos φ_n^* devido às relações de ortogonalidade e completudeza (222).

Mais explicitamente, a expansão se escreve, em termos de ondas planas, como

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} p_{\vec{k}}(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (233)$$

Agora, seja $F[\phi, \pi]$ um *funcional* que não tenha dependência explícita no tempo t ; então

$$\begin{aligned} \dot{F}(t) &= \int_V d^3x \left(\frac{\partial F(t)}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial F(t)}{\partial \pi} \dot{\pi} \right) \\ &= \int_V d^3x \left(\frac{\partial F(t)}{\partial \phi} \frac{\partial H}{\partial \pi} - \frac{\partial F(t)}{\partial \pi} \frac{\partial H}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (234)$$

onde utilizamos as equações de movimento de Hamilton, com H sendo a Hamiltoniana do sistema. Temos agora, usando a notação para os colchetes de Poisson,

$$\dot{F} = \{F, H\} \quad (235)$$

No caso de dependência explícita no tempo, a equação acima fica

$$\dot{F} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (236)$$

Três relações importantes podem ser demonstradas:

$$\{\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (237)$$

$$\{\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)\} = 0 \quad (238)$$

$$\{\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)\} = 0. \quad (239)$$

7.5. Campo Escalar Complexo

Dois campos escalares reais de massas idênticas, ϕ_1 e ϕ_2 , sempre podem ser combinadas para gerarem campos escalares complexos, a partir das definições:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (240)$$

$$\phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (241)$$

de modo que os campos originais ϕ_1 e ϕ_2 , podem ser também expressos em termos de ϕ e ϕ^* ,

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^*}{\sqrt{2}}, \quad (242)$$

$$\phi_2 = \frac{\phi - \phi^*}{i\sqrt{2}}, \quad (243)$$

A densidade Lagrangeana do campo livre tanto pode ser expressa em termos dos campos reais ϕ_1 e ϕ_2 , quanto em termos dos campos complexos ϕ e ϕ^* (por conveniência, tomamos o coeficiente global $\alpha = -1/2$):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi_1)^2 + \lambda^2 \phi_1^2] - \frac{1}{2}[(\partial_\mu \phi_2)^2 + \lambda^2 \phi_2^2] \quad (244)$$

$$= -(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi^*) - \lambda^2 \phi \phi^* \quad (245)$$

As equações de campo podem ser obtidas pelo princípio variacional, tratando ϕ e ϕ^* como campos independentes:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow (\square^2 - \lambda^2)\phi^* = 0 , \quad (246)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0 \Rightarrow (\square^2 - \lambda^2)\phi = 0 \quad (247)$$

Façamos agora uma transformação ortogonal nos campos ϕ_1 e ϕ_2 , de tal modo que:

$$\phi'_1 = \phi_1 \cos \theta - \phi_2 \sin \theta , \quad (248)$$

$$\phi'_2 = \phi_1 \sin \theta + \phi_2 \cos \theta \quad (249)$$

onde θ é uma constante real. Em termos de ϕ e ϕ^* , esta transformação ortogonal se escreve:

$$\phi' = e^{i\theta} \phi , \quad (250)$$

$$(\phi')^* = e^{-i\theta} \phi^* , \quad (251)$$

Observamos então que a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi^*) - \lambda^2 \phi \phi^* \quad (252)$$

é invariante por aquela transformação, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Isto, evidentemente só é possível quando as massas associadas aos campos escalares reais ϕ_1 e ϕ_2 forem estritamente iguais. Tomando-se θ infinitesimal, podemos escrever a variação:

$$\delta \phi = i\theta \phi , \quad (253)$$

$$\delta \phi^* = -i\theta \phi^* , \quad (254)$$

Por outro lado, tais variações induzem a seguinte variação em \mathcal{L} :

$$\delta\mathcal{L} = -i\theta\partial_\mu(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \quad (255)$$

onde, na dedução deste resultado usamos as equações de Euler–Lagrange. Contudo, vimos que a transformação em questão deixa a densidade Lagrangeana invariante, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, de modo que necessariamente devemos ter $\delta\mathcal{L} = 0$. Assim, obtemos

$$\partial_\mu s_\mu = 0 \quad (256)$$

onde definimos a quantidade

$$s_\mu \equiv i(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \quad (257)$$

Estas duas últimas equações nos dizem que existe uma quantidade vetorial — o quadrivetor *corrente* — s_μ , cuja quadridivergência se anula. Portanto temos aqui uma lei de conservação.

Observamos que se fizermos a troca $\phi \leftrightarrow \phi^*$, s_μ troca de sinal. Isto nos sugere que esta quantidade pode ser interpretado como uma densidade de carga–corrente, de tal modo que se ϕ é o campo correspondente a uma partícula com carga e , então ϕ^* será o campo ao qual corresponderá uma partícula de carga $-e$.

Notas e observações pertinentes:

- A degenerescência na massa dos campos ϕ_1 e ϕ_2 implica na invariância de \mathcal{L} por uma transformação ortogonal que por sua vez resulta na conservação da carga elétrica, associada aos campos complexos ϕ e ϕ^* . Em princípio, porém, nada há que nos obrigue a relacionar o quadrivetor s_μ à carga–corrente da eletrodinâmica; poderia ser qualquer outro atributo interno com características similares à da carga elétrica;

- A conexão entre invariância sob uma certa transformação e uma lei de conservação correspondente é bem conhecida tanto na mecânica clássica quanto na mecânica quântica. No caso acima visto, temos o que se conhece como *teorema de Noether*;
- A invariância da densidade Lagrangiana no caso acima visto ocorre com a transformação ortogonal definida em termos de um parâmetro real independente das coordenadas do espaço-tempo, isto é, $\theta = \text{constante} \forall x$. Tal transformação é conhecida como *transformação de calibre (no inglês, “gauge”) de primeira espécie*.

7.5 Campos em Interação: O Potencial de Yukawa

As densidades Lagrangeanas até aqui consideradas descrevem *campos escalares* — tanto reais quanto complexos — mas *livres*, isto é, campos considerados na ausência de quaisquer fontes, ou seja, no vácuo. Entretanto, uma descrição realista da natureza nos obriga a considerar campos em interação. Assim, o que pretendemos fazer nesta seção é dar o princípio da idéia que está por trás de como incorporar interações no formalismo Lagrangeano de campos.

A interação do campo escalar ϕ com uma fonte pode ser facilmente incorporada ao formalismo Lagrangiano pela inclusão de um termo adicional na densidade Lagrangiana, termo este da forma:

$$\mathcal{L}_{int} = -\phi\rho, \quad (258)$$

onde ρ é a densidade da fonte, em geral, uma função das coordenadas do espaço-tempo. A inclusão de tal termo modifica as equações de campo (de

Euler–Lagrange), de modo que agora

$$(\square - \lambda^2)\phi = \rho. \quad (259)$$

7.5.1 Solução num caso particular

Consideremos a solução particular com as seguintes características:

- Solução estática (independente do tempo) : $\phi = \phi(\vec{x})$, $\rho = \rho(\vec{x})$;
- Fonte pontual na origem: $\rho(\vec{x}) = G\delta(\vec{x})$.

onde G é uma constante. A equação de Klein–Gordon se torna então:

$$(\nabla^2 - \lambda^2)\phi(\vec{x}) = G\delta(\vec{x}) \quad (260)$$

Esta equação pode ser resolvida usando-se o método da transformada de Fourier. Definindo

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{\phi}(\vec{k}), \quad (261)$$

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(\vec{x}), \quad (262)$$

e multiplicando-se ambos os lados da equação de Klein–Gordon por

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{x}),$$

e integrando-se em d^3x , obtemos

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \nabla^2 \phi(\vec{x}) - \lambda^2 \tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{G}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (263)$$

Integremos por parte o primeiro termo por duas vezes e obteremos como termo integrado,

$$\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ \nabla \phi(\vec{x}) + i\vec{k} \phi(\vec{x}) \right\}_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \quad (264)$$

Supondo que tanto o campo $\phi(\vec{x})$ quanto seu gradiente, $\nabla\phi(\vec{x})$ vai rapidamente a zero para o limite $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, este termo integrado pode ser omitido e a equação de Klein–Gordon se torna então:

$$-(|\vec{k}|^2 + \lambda^2)\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{G}{(2\pi)^{3/2}} \quad (265)$$

Agora, aquela que era primitivamente uma equação diferencial de segunda ordem, se tornou uma equação algébrica, facilmente solúvel:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = -\frac{G}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}. \quad (266)$$

Com isto, calculamos a transformada inversa,

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{G}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{|\vec{k}|^2 + \lambda^2}. \quad (267)$$

Se definimos $k \equiv |\vec{k}|$, $r \equiv |\vec{x}|$, $\Theta \equiv$ ângulo entre (\vec{k}, \vec{x}) e considerando que

$$d^3k = k^2 dk d(\cos \Theta) d\Phi \quad (268)$$

e

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = kr \cos \Theta \quad (269)$$

podemos realizar as integrações pertinentes. A integral na variável Φ é imediata e vale 2π enquanto a integral em $\cos \Theta$ resulta em $2 \sin(kr)/kr$ de modo que temos a integral em k :

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{G}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin(kr) 2k dk}{(k^2 + \lambda^2)} \quad (270)$$

Finalmente, a integral em k pode ser resolvida resultando em $\pi e^{-\lambda r}$, de modo que, temos:

$$\phi(\vec{x}) = -\frac{G}{4\pi} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \quad (271)$$

Esta última expressão é justamente o que Yukawa propôs como sendo o potencial para as forças nucleares. Assim, um *nucleon* (proton ou neutron) é a fonte de um campo de força, chamado *campo mesonico*, de maneira similar como um objeto eletricamente carregado é a fonte de um campo eletrostático.

Observações Pertinentes:

- * Ao contrário do campo Coulombiano, a interação mesonica é de curto alcance, uma vez que decai rapidamente a zero no limite para $\lambda r \gg 1$;
- * Supondo que um campo escalar estático interage com uma fonte estática e puntual, podemos entender qualitativamente a força de curto alcance entre dois nucleons;
- * A massa de um quantum associado a esse campo foi originalmente estimado por Yukawa como sendo da ordem de 200 vezes a massa do elétron. A massa do pion (meson pi) observado descoberto por C.F. Powell e colaboradores em 1947 é cerca de 270 vezes a massa do elétron;
- * A interação do campo mesonico do pion com o nucleon de modo mais realístico, deve considerar refinamentos com a inclusão de spin e paridade intrínseca do pion.

7.6 Campos de Maxwell Clássicos

Consideraremos como última parte deste curso, os campos eletromagnéticos dentro do contexto da eletrodinamica clássica. Nas unidades racionalizadas de Heaviside–Lorentz, as equações de Maxwell se escrevem:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \quad (272)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{c}, \quad (273)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (274)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0. \quad (275)$$

A constante de estrutura fina é dada por

$$\frac{e^2}{4\pi \hbar c} \approx \frac{1}{137,04}$$

As equações de Maxwell podem ser reescritas de modo conciso introduzindo-se o tensor anti-simétrico de campo $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ e o quadrivetor carga-corrente j_μ do seguinte modo:

$$F_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad (276)$$

e

$$j_\mu = (\vec{j}, ic\rho). \quad (277)$$

Com isto, o primeiro par de equações de Maxwell tornam-se:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{j_\mu}{c}. \quad (278)$$

Uma vez que o tensor $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico, temos imediatamente a equação de continuidade para a densidade de carga-corrente, desde que se tomarmos a quadridivergência em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu j_\mu}{c} = 0. \quad (279)$$

Isto quer dizer que a teoria de Maxwell é construída de tal forma que a conservação da carga-corrente é garantida automaticamente uma vez que $F_{\mu\nu}$ é definida.

O potencial A_μ é introduzido do seguinte modo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \quad (280)$$

de modo que explicitamente enxergamos a anti-simetria do tensor $F_{\mu\nu}$.

O segundo par das equações de Maxwell pode ser escrito da seguinte forma:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 . \quad (281)$$

Temos agora que “construir” a nossa densidade Lagrangiana, tal que obtenhamos as equações de Maxwell. Para tanto vamos verificar que a única verdadeira densidade escalar que pode ser construída a partir do tensor de campo $F_{\mu\nu}$ é:

$$F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(|\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2) . \quad (282)$$

O outro escalar

$$\frac{i}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \vec{B} \cdot \vec{E} , \quad (283)$$

onde

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{permutação par de } 1, 2, 3, 4 \\ -1 & \text{permutação ímpar de } 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (284)$$

não é dinâmico (não afeta as equações de movimento) uma vez que pode ser escrita como uma quadridivergência:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 4 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\sigma) - 4 \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma . \quad (285)$$

★ Exercício: Mostre esta expressão acima!

O segundo termo à direita da expressão acima se anula uma vez que os operadores $\partial_\mu \partial_\rho$ são simétricos, enquanto o pseudo-tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é totalmente anti-simétrico nos seus índices.

Desta forma, a densidade Lagrangiana que poderíamos construir com os escalares de Lorentz disponíveis é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{j_\mu A_\mu}{c} \quad (286)$$

Considerando cada componente de A_μ como campos independentes, obtemos as equações de Euler–Lagrange seguintes:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{j_\mu}{c} \quad (287)$$

que é justamente as equações de Maxwell na sua forma covariante. Escritas em termos do potencial A_μ , elas são:

$$\square A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A_\nu) = -\frac{j_\mu}{c} \quad (288)$$

Vamos supor que a quantidade $\partial_\nu A_\nu \neq 0$. Se assim for, podemos ainda redefinir a quantidade A_ν sem que isto acarrete em modificação no tensor $F_{\mu\nu}$, da seguinte maneira:

$$A_\mu^{\text{nov}} = A_\mu^{\text{antigo}} + \partial_\mu \chi, \quad (289)$$

onde

$$\square \chi = -\partial_\mu A_\mu^{\text{antigo}}. \quad (290)$$

Note que a quantidade χ é em princípio qualquer função das coordenadas espaço–temporais x que satisfaçam a condição acima. Vamos conferir a afirmação feita acima a respeito da invariância de $F_{\mu\nu}$.

$$F_{\mu\nu}^{\text{nov}} = \partial_\mu A_\nu^{\text{nov}} - \partial_\nu A_\mu^{\text{nov}} \quad (291)$$

$$= \partial_\mu(A_\nu^{\text{antigo}} + \partial_\nu \chi) - \partial_\nu(A_\mu^{\text{antigo}} + \partial_\mu \chi) \quad (292)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^{\text{antigo}} - \partial_\nu A_\mu^{\text{antigo}} + (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\chi \quad (293)$$

$$= F_{\mu\nu}^{\text{antigo}}, \forall \chi. \quad (294)$$

Impondo a condição $\square\chi = -\partial_\mu A_\mu^{\text{antigo}}$, evidentemente teremos agora

$$\partial_\mu A_\mu^{\text{novo}} = \partial_\mu A_\mu^{\text{antigo}} + \square\chi \equiv 0 \quad (295)$$

Toda a argumentação que fizemos no entorno disto é para mostrar que podemos na realidade trabalhar com a equação de campo mais simples

$$\square A_\mu = -\frac{j_\mu}{c}, \quad (296)$$

onde os A_μ satisfazem

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (297)$$

Esta última condição, que toma como nula a quadridivergência do vetor potencial A_μ é conhecida como *condição de Lorentz*. Mesmo ainda dentro deste contexto, o potencial A_μ não é único, uma vez que podemos tomar a transformação

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (298)$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função qualquer de x que satisfaz a equação homogênea

$$\square\Lambda(x) = 0 \quad (299)$$

A transformação acima definida é conhecida como *transformação de calibre (no inglês "gauge") de segunda espécie*. Aqui, o parâmetro que define a transformação é um parâmetro dito *local*, porquanto depende da coordenada x .

8 CAMPOS QUÂNTICOS

A formulação da mecânica quântica relativística apresenta dois problemas sérios:

1. *O fracasso na interpretação probabilística para as partículas de spin inteiro, devido ao aparecimento de estados com probabilidade negativa;*
2. *A segunda e maior dificuldade está no aparecimento, em todos os casos, de estados com energia negativa.*

Até aqui temos tratado o campo como um sistema mecânico onde identificamos certas propriedades básicas como energia, momento, carga, etc. do campo. Mas como essas propriedades do campo se relacionam com os estados de partícula? A solução vem pela *quantização* do campo, onde o campo é reinterpretado como um sistema quântico e não clássico, com um número infinito de graus de liberdade. Assim, para assegurar a positividade da energia, devemos tratar campos de spin inteiro e semi-inteiro de maneiras distintas.

8.0.1 Quantização do campo de Klein-Gordon

O exemplo mais simples de campo relativístico é o *campo escalar real*. Para quantizá-lo, aplicamos a prescrição que é utilizada para quantizar a mecânica não-relativística, fazendo a substituição

$$\{A, B\} \Rightarrow -i[A, B], \quad (300)$$

onde $[A, B] = AB - BA$ é o *comutador* de A e B . Realizando esta substituição em (237) obtemos as *relações de comutação a tempos iguais*:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) & (301) \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] &= 0 \\ [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] &= 0. \end{aligned}$$

que são os equivalentes às regras de comutação padrão da mecânica quântica não relativística.

Desde que os campos clássicos ϕ e π são *reais* por construção, eles se tornam em OPERADORES *hermitianos* sob quantização. As equações de movimento, usando as substituições (300) serão dadas por:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\vec{x}, t) &= -i[\phi(\vec{x}, t), H(t)] \\ \dot{\pi}(\vec{x}, t) &= -i[\pi(\vec{x}, t), H(t)],\end{aligned}\tag{302}$$

onde $H(t)$ é a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int_V d^3x [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + \lambda^2 \phi^2]\tag{303}$$

de modo que, desenvolvendo os comutadores à direita de (302), obtemos

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \pi(\vec{x}, t)\tag{304}$$

$$\dot{\pi}(\vec{x}, t) = (\nabla^2 - \lambda^2) \phi(\vec{x}, t).\tag{305}$$

A primeira das equações acima revela que a relação entre π e ϕ é a mesma que no caso clássico. Eliminando-se π obtemos para a segunda equação:

$$\ddot{\phi}(\vec{x}, t) = (\nabla^2 - \lambda^2) \phi(\vec{x}, t),\tag{306}$$

de modo que os operadores de campos quantizados ainda satisfazem a equação de Klein-Gordon.

Como as equações de movimento do campo, tanto clássica quanto quânticas são idênticas, podemos expandir $\phi(\vec{x}, t)$ em termos de um conjunto completo de soluções de ondas planas, analogamente a (220) de modo que:

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} [a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)}],\tag{307}$$

onde agora, os coeficientes $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$ são OPERADORES hermitianos adjuntos entre si, para assegurar a hermiticidade de $\phi(\vec{x}, t)$. A expansão pode ser invertida:

$$a_{\vec{k}} = \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} \int_V d^3x e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} \overleftrightarrow{\partial}_t \phi(\vec{x}, t), \quad (308)$$

$$a_{\vec{k}}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}V}} \int_V d^3x \phi(\vec{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_t e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)}, \quad (309)$$

onde o símbolo $\overleftrightarrow{\partial}_t$ é definido como

$$A \overleftrightarrow{\partial}_t B \equiv A \partial_t B - (\partial_t A) B$$

- Nota: Mostre (308) e (309)

As relações de comutação para os OPERADORES coeficientes da expansão ficam então

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} & (310) \\ [a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}] &= 0 \\ [a_{\vec{k}}^\dagger, a_{\vec{k}'}^\dagger] &= 0. \end{aligned}$$

Usando (307) e

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{-i\sqrt{\omega_{\vec{k}}}}{\sqrt{2V}} \sum_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} - a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega_{\vec{k}}t)} \right], \quad (311)$$

podemos exprimir a Hamiltoniana do sistema em termos de a e a^\dagger , da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) \omega_{\vec{k}} \quad (312)$$

$$= \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \omega_{\vec{k}}, \quad (313)$$

que é exatamente a Hamiltoniana para o oscilador harmônico da mecânica quântica!. Note que o termo $E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}$ é uma constante infinita, denominada *energia do ponto zero*. Este infinito é usualmente renormalizado simplesmente redefinindo a Hamiltoniana pelo *ordenamento normal* dos operadores, isto é,

$$H = \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}}. \quad (314)$$

Sendo assim, observamos que os operadores a^\dagger e a são os operadores de **CRIAÇÃO** e **DESTRUIÇÃO** de partículas de spin nulo e massa λ . Este resultado crucial provê a interpretação de partícula ausente na teoria de campos clássicos.

8. Bibliografia e Sugestões para uma Leitura/Estudo mais Aprofundados:

- * *Mecânica Analítica*, de J.W. Leeche;
- * *The Principles of Quantum Mechanics*, de P.A.M. Dirac;
- * *A Pedestrian Approach to Quantum Field Theory*, de E.G. Harris
- * *The Classical Theory of Fields*, de L.D. Landau e M. Lifshitz
- * *Field Theory: A Modern Primer*, de P. Ramond
- * *Introduction to Modern Theoretical Physics, vol. 1 — Classical Physics and Relativity*, de E.G. Harris
- * *Advanced Quantum Mechanics*, de J.J. Sakurai
- * *Particles and Fields*, de D. Lurié.